EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….062

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocaţională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,2\sqrt{3}), B(-1,2\sqrt{3}), C(0,\sqrt{3})$.

(4p) **a)** Să se calculeze aria triunghiului ABC.

(4p) **b)** Să se determine valorile lui a pentru care punctele $B(-1,2\sqrt{3})$, $C(0,\sqrt{3})$ şi $D(a,0)$ sunt coliniare.

(4p) **c)** Să se arate că triunghiul ABC este echilateral.

(4p) **d)** Să se determine lungimea înălţimii din B în triunghiul ABC.

(2p) **e)** Să se afle distanţa de la punctul $O(0,0)$ la dreapta AB.

(2p) **f)** Să se determine suma soluţiilor complexe ale ecuaţiei $z^4 = 1$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Dacă ecuaţia $x^2 - x + 1 = 0$ are rădăcinile complexe x_1, x_2, să se calculeze $x_1^3 + x_2^3$.

(3p) **b)** Să se determine al doilea termen al dezvoltării $(1+\sqrt{2})^{10}$.

(3p) **c)** Să se afle numărul funcţiilor $f:\{1, 2\} \to \{1, 2, 3\}$.

(3p) **d)** Să se determine parametrii reali a, b astfel încât polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX + b$ să fie divizibil cu $X-2$ şi împărţit la $X-1$ să dea restul 4.

(3p) **e)** Să se rezolve în **R** inecuaţia $2^x < 3^x$.

2. Se consideră funcţia $f:[1,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [1,\infty)$.

(3p) **b)** Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $[1,\infty)$.

(3p) **c)** Să se determine ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

(3p) **d** Să se arate că $0 < f(x) \le 1$, $\forall x \in [1,\infty)$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_1^2 f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră o funcție $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$, cu proprietatea

$f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall\ x,y\in\mathbf{Q}$.

(4p) **a)** Să se arate că $f(0)=0$.

(4p) **b)** Să se arate că $f(-x)=-f(x)$, $\forall\ x\in\mathbf{Q}$.

(4p) **c)** Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că

$f(x_1+x_2+...+x_n)=f(x_1)+...+f(x_n), \forall\ n\in\mathbf{N}^*$ şi $\forall\ x_1, x_2, ..., x_n\in\mathbf{Q}$.

(2p) **d)** Să se deducă egalitatea $f(nx)=nf(x), \forall x\in\mathbf{Q}$, $\forall\ n\in\mathbf{N}$.

(2p) **e)** Notăm $a=f(1), a\in\mathbf{Q}$. Să se arate că $f(x)=a\cdot x$, $\forall\ x\in\mathbf{Q}$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $f(1)\neq 0$, atunci funcția f este bijectivă .

(2p) **g)** Să se demonstreze că dacă $(H,+)$ este subgrup al grupului $(\mathbf{Q},+)$ şi este izomorf cu grupul $(\mathbf{Q},+)$, atunci $H=\mathbf{Q}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x\cos\frac{\pi}{x}$ şi $g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R}$, $g(x)=\cos x+x\sin x$.

(4p) **a)** Să se calculeze $g'(x)$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

(4p) **c)** Să se verifice că $g'(x)>0$, $\forall\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(2p) **d)** Să se arate că $g(x)>1$, $\forall\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(2p) **e)** Utilizând teorema lui *Lagrange* pentru funcția *f*, să se demonstreze inegalitatea

$f(x+1)-f(x)>1$, $\forall\ x>2$.

(2p) **f)** Să se arate că $f(n)>n-2$, $\forall\ n\in\mathbf{N}$, $n\geq 3$

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(1)+f(2)+...+f(n)}{n^2}$.